

Lo que nunca imaginaron Navier y Stokes: fluidos de electrones

Jorge Estrada-Álvarez, Elena Díaz, Ricardo Brito y Francisco Domínguez-Adame

El progreso en los materiales bidimensionales ha revelado un régimen en el que los electrones se comportan como un fluido convencional. Este régimen hidrodinámico posibilita la aparición de comportamientos exóticos en nuevos materiales, como la formación de vórtices o el denominado flujo Poiseuille, caracterizado por un perfil transversal de velocidades parabólico. La investigación actual ha iniciado la búsqueda de aplicaciones tecnológicas en el diseño de nuevos dispositivos electrónicos.

En el siglo XIX, Claude-Louis Navier y George Gabriel Stokes dedujeron sus famosas ecuaciones para fluidos clásicos. Dos siglos más tarde, los descubrimientos de nuevos materiales, incluyendo el grafeno, han puesto de manifiesto un régimen de transporte en el que los electrones obedecen dichas ecuaciones, exhibiendo un comportamiento característico de un fluido. Entre los efectos a los que da lugar la hidrodinámica de electrones se encuentra el flujo Poiseuille, la formación de vórtices o el efecto superbalístico, que permite reducir la resistencia de los dispositivos electrónicos. La figura 1 ilustra el comportamiento hidrodinámico de los electrones, con potenciales aplicaciones tecnológicas de un campo en el que aún queda mucho por explorar [1,2].

Un nuevo régimen de transporte de electrones

El Premio Nobel de Física de 2010 fue concedido a Andre Geim y Konstantin Novoselov por sus innovadores experimentos en grafeno. Desde entonces, los descubrimientos relacionados con este material no han dejado de sucederse. El grafeno es un material bidimensional formado por una capa de átomos de carbono, que presentan una estructura hexagonal, como la de un panal de abejas. Su estructura atómica hace que el grafeno sea idóneo para fabricar materiales más complejos, como las estructuras rotadas que estudia Pablo Jarillo-Herrero y su grupo del MIT [3]. Además, el grafeno se encuentra entre los materiales con mayor resistencia mecánica y, gracias a su carácter bidimensional, es prácticamente transparente en el rango visible. También destacan sus propiedades de transporte de carga, con unos electrones que pueden viajar grandes distancias sin verse perturbados. Estas distancias son muy superiores a las encontradas en los metales convencionales, por lo que, con las técnicas de fabricación adecuadas, es habitual que los electrones solo colisionen con el perímetro del dispositivo. En este escenario ha llegado la hora de explorar nuevos regímenes de transporte que desafían nuestras ideas más arraigadas sobre el movimiento de los electrones.

Veamos, entonces, cómo funciona el transporte de electrones en un dispositivo de grafeno como el mostrado en la figura 2. Cuando se aplica un campo eléctrico los electrones se aceleran y aparece una corriente de carga. Sin embargo, los electrones sufren distintos tipos de colisiones que frenan su movimiento, dando lugar a la resistencia eléctrica. Habitualmente se considera que estas colisiones se producen contra

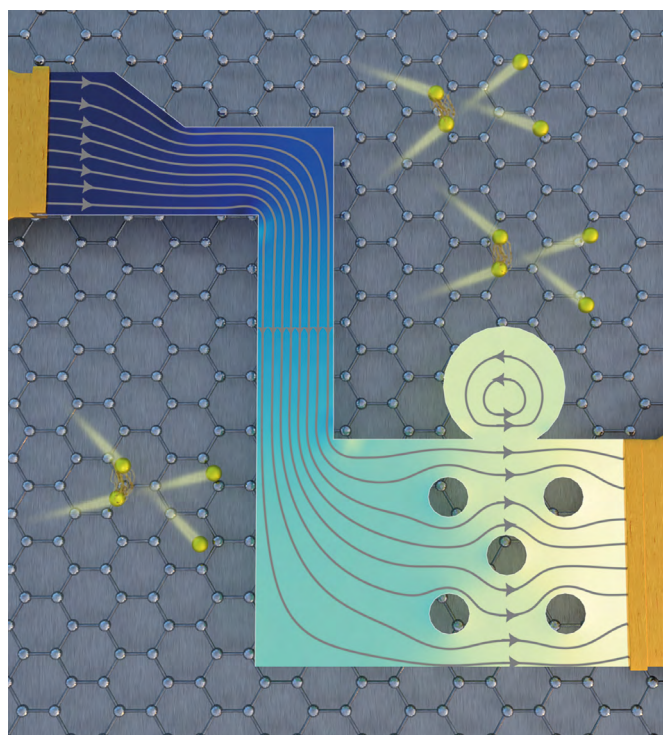
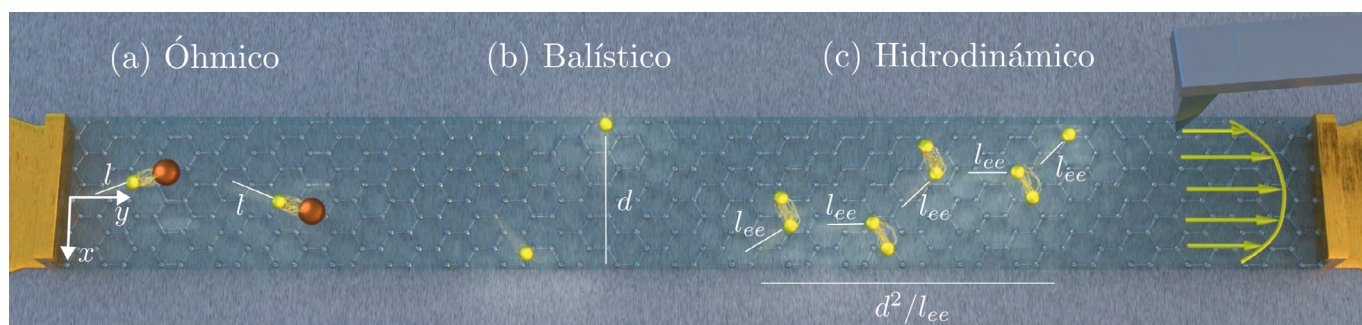


Fig. 1. Hidrodinámica de electrones en grafeno. La figura muestra un dispositivo bidimensional de geometría no uniforme en el que se incluyen obstáculos mesoscópicos, en este caso orificios circulares. Tanto la geometría como las colisiones entre electrones favorecen un régimen de transporte en el que estos se comportan como un fluido convencional, según indican las líneas de flujo electrónico en color gris. El color variable a lo largo del dispositivo refleja cualitativamente el cambio del potencial eléctrico.



los defectos del material y, a temperatura finita, contra las vibraciones atómicas de la red cristalina (fonones). Denotemos por l la distancia típica que un electrón viajará antes de sufrir una de estas colisiones. Cuando el transporte es *óhmico*, la resistencia eléctrica cumple

$$R \propto \frac{1}{l} \quad \text{si } l \ll d. \quad (1)$$

Esta expresión, que es válida cuando l es menor que el tamaño d del dispositivo, se puede entender a partir del modelo que se explica en los cursos introductorios de física del estado sólido, propuesto por Paul Drude en 1900. No obstante, en dispositivos de grafeno es común que no se cumpla la relación (1), y que sea el tamaño del propio dispositivo el que fije la escala de colisiones de los electrones. Así, en el denominado régimen *balístico*, la resistencia satisface

$$R \propto \frac{1}{d} \quad \text{si } d \ll l. \quad (2)$$

Quedan por considerar, todavía, las colisiones de un electrón con otro electrón. Estas colisiones exigen que se conserve tanto el momento como la energía y, como los electrones obedecen el principio de exclusión de Pauli, no es tan fácil encontrar dos electrones que puedan colisionar. En los metales ordinarios a temperatura ambiente, el principio de exclusión reduce el número de colisiones a tan solo una de ellas de cada $(T_F/T)^2 \sim 10^4$ posibles colisiones que conservan momento y energía, siendo T_F la temperatura de Fermi [4]. A pesar de ello, a temperatura finita, las colisiones entre electrones son posibles y, como la fuerza de Coulomb entre dos electrones es muy intensa, estas pueden llegar a ser frecuentes. En los metales convencionales, el aumento de la temperatura para favorecer las colisiones electrón-electrón hace que aumenten también las colisiones con las vibraciones atómicas de la red cristalina, enmascarando en parte sus efectos. Sin embargo, el carácter bidimensional del grafeno limita las vibraciones de la red, permitiendo que las colisiones entre electrones dominen. De forma cualitativa, si denotamos por l_{ee} la distancia que un electrón viajará antes de chocar con otro, es habitual que $l_{ee} \ll l$ [1,5]. Por ello, se vuelve necesario incluirlas en la descripción del trans-

porte. El primer impulso es, entonces, escribir $R \propto 1/l_{ee}$. No obstante, las colisiones entre electrones no afectan a la resistencia porque un electrón transfiere su momento a otro electrón, sin interrumpir la corriente eléctrica. Pero, antes de dejarlas en el cajón del olvido, surge una pregunta: ¿qué pasa si las combinamos con el efecto del tamaño del dispositivo?

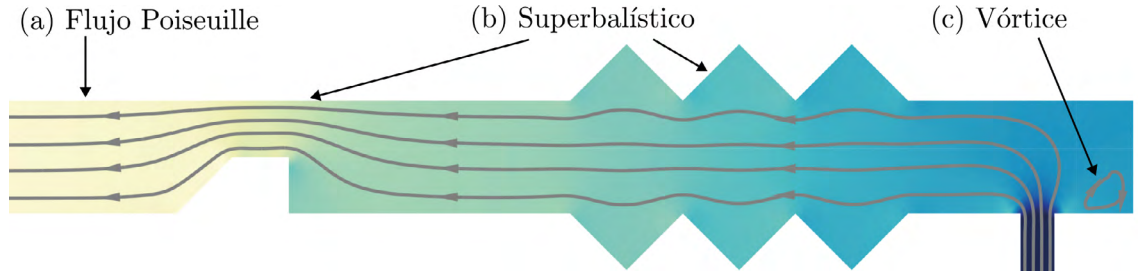
Pues claro, las colisiones entre electrones no hacen nada por sí solas... ¡pero evitan que los electrones alejados del borde puedan alcanzarlo! Vayamos al límite en el que $l_{ee} \ll d \ll l$, y aunque no hace falta ser tan estrictos, para poder dar una expresión sencilla, asumiremos $d^2/l_{ee} \ll l$. En este caso, antes de llegar al borde, un electrón sufre colisiones con otros electrones. En circunstancias normales, el número de pasos de longitud l_{ee} que tendría que dar hasta llegar al borde de la muestra es d^2/l_{ee} , pero cada vez que el electrón choca con otro electrón cambia su dirección de movimiento. Cada paso podría acercarlo a la pared o, por el contrario, apartarlo de esta. Por tanto, estamos ante un modelo de caminante aleatorio. Consideremos un caminante que trata de llegar a su casa, pero que da pasos en todas las direcciones con igual probabilidad. Si en condiciones normales llegaría en d/l_{ee} pasos, ahora, en promedio, necesitará $(d/l_{ee})^2$ pasos y habrá recorrido una distancia d^2/l_{ee} . Por consiguiente

$$R \propto \frac{l_{ee}}{d^2} \quad \text{si } l_{ee} \ll d \ll l. \quad (3)$$

Es decir, no solo es que las colisiones electrón-electrón no aumentan la resistencia, sino que, contra toda intuición, la disminuyen. Esta fue la idea que tuvo Radii Gurzhi en 1963 [6]. Sin embargo, en su época, los materiales disponibles, fundamentalmente metales, no permitían aumentar la temperatura sin pasar directamente al régimen óhmico, imposibilitando cualquier intento de observar la disminución en la resistencia. Por suerte, todo cambió con el descubrimiento de nuevos materiales: heteroestructuras de arseniuro de galio, semimetales de Weyl, y por supuesto, el propio grafeno. La reducción de la resistencia en estos materiales, conocida como efecto Gurzhi, es una manifestación más de un nuevo régimen de transporte: el régimen *hidrodinámico*.

Fig. 2. Transporte de electrones en un canal de grafeno en los regímenes (a) óhmico, (b) balístico e (c) hidrodinámico. Las pequeñas esferas amarillas simulan el comportamiento de los electrones, mientras que las esferas naranjas más grandes representan la interacción con fonones. A la derecha se muestra el perfil de velocidades de los electrones en el régimen hidrodinámico, que se puede obtener mediante técnicas de microscopía de proximidad.

Fig. 3. Una correcta elección de la geometría realza los efectos hidrodinámicos, intensifica el efecto superbalístico y permite la formación de vórtices en las trayectorias de los electrones.



Navier y Stokes al rescate

Otro aspecto muy importante es que las colisiones entre electrones inducen un movimiento colectivo, como las moléculas de un fluido convencional. Ya no es necesario fijarse en cada electrón de manera individual, sino que podemos describir el conjunto de electrones como un medio continuo caracterizado por una velocidad $\mathbf{u}(\mathbf{r})$, que en estado estacionario es independiente del tiempo. El campo de velocidades satisface la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (4)$$

y, por supuesto, la ecuación de Navier-Stokes

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\mathbf{u}}{\tau} = \frac{e v_F}{p_F} \nabla V, \quad (5)$$

donde V es el potencial eléctrico aplicado, $-e$ la carga del electrón, v_F la velocidad y p_F el momento de Fermi. La ausencia de un término asociado al gradiente de presión se debe a que la densidad de electrones es uniforme. Las colisiones entre electrones entran, de forma natural, en la viscosidad $V \approx v_F l_{ee}/4$, es decir, cuantas más colisiones entre electrones haya, menor será la fricción viscosa. Por su parte, las colisiones con defectos están incluidas a través del término proporcional a $1/\tau = v_F l$. Este término debe controlarse no solo para que la descripción hidrodinámica sea rigurosa, sino para maximizar el impacto de la viscosidad.

En materiales bidimensionales, como el grafeno, la hidrodinámica reemplaza la velocidad de arrastre de la conocida ley de Ohm $\mathbf{u} = (e v_F / p_F) \nabla V$ por otra donde las colisiones entre electrones juegan un papel determinante. No obstante, en el transporte de electrones hay más procesos a tener en cuenta, como las colisiones con defectos, el campo magnético o la aplicación de un campo eléctrico de alta frecuencia [7]. Aunque, por analogía con fluidos convencionales, las ecuaciones de Navier-Stokes se emplean cuando las colisiones entre electrones son frecuentes, hemos demostrado que este requisito es excesivamente estricto [8]. De hecho, controlar las colisiones con defectos, aplicar un campo magnético o incluso utilizar radiación de alta frecuencia hacen que el modelo de Navier-Stokes se vuelva válido, y que las propiedades de los electrones sean asimilables a las de un fluido. Es algo que no consideraron Navier y Stokes, pero tampoco Gurzhi cuando impuso

$l_{ee} \ll d \ll d^2/l_{ee} \ll l$ como un requisito indispensable para el efecto que lleva su nombre. Las evidencias experimentales muestran que los efectos exóticos de la hidrodinámica son más generales de lo esperado.

Una avalancha de efectos contraintuitivos

Los experimentos llevados a cabo en nuevos materiales han desencadenado una avalancha de descubrimientos contrarios a la intuición. Para intentar entenderlos resolvamos la ecuación de Navier-Stokes en un canal uniforme de anchura d como el de la figura 2 cuando el transporte está dominado por las colisiones entre electrones

$$\nu \frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{v_F}{p_F} F, \quad (6)$$

donde $F = e dV/dy$ es la fuerza que actúa sobre cada electrón debido al campo eléctrico. Por sencillez en el cálculo, supondremos que el campo eléctrico es uniforme. Por otra parte, y pese a la complejidad de describir los efectos de borde rigurosamente [8], asumiremos que en estos la velocidad es cero. Integrando dos veces se obtiene

$$u(x) = \frac{2F}{p_F l_{ee}} \left(\frac{d^2}{4} - x^2 \right). \quad (7)$$

Esta solución es la asociada al flujo Poiseuille, en el que la velocidad de los electrones es máxima en el centro del canal y disminuye conforme nos acercamos a los bordes.

El flujo Poiseuille, caracterizado por formar un perfil transversal de velocidades parabólico, contrasta con el perfil uniforme que surge en el caso del transporte óhmico, constituyendo, por ende, el primer efecto inesperado en el flujo viscoso de electrones. Experimentalmente se observa de forma directa empleando técnicas de microscopía de proximidad que permiten visualizar el potencial eléctrico en el interior de la muestra y, en consecuencia, determinar la corriente [5]. Pero no solo eso, sino que la ley de Poiseuille afecta a las propiedades eléctricas del dispositivo. Si integramos el perfil de velocidades obtenemos una resistencia que escala como

$$R \propto \frac{l_{ee}}{d^2}, \quad (8)$$

en perfecto acuerdo con el modelo del caminante aleatorio. Este resultado obtenido a través de un

tratamiento simplificado concuerda con lo observado en experimentos de hidrodinámica de electrones donde, a pesar de las inevitables colisiones con defectos, se observa una fuerte dependencia de las propiedades eléctricas con el tamaño del sistema, lo que condiciona el diseño de los dispositivos.

Otra manifestación hidrodinámica es el efecto Gurzhi o superbalístico, en el que se predice una disminución de la resistencia del dispositivo debido a las colisiones entre electrones [9,10]. Esto se logra con el aumento de la temperatura: a temperaturas intermedias la resistencia de los dispositivos cae por debajo del límite balístico. De nuevo, este es un comportamiento inesperado en el transporte electrónico en conductores donde, típicamente, aumentar la temperatura implica un aumento de su resistencia. Por otro lado, en sistemas de electrones, no solo podemos variar la temperatura, sino que también podemos aplicar un campo magnético. El campo magnético varía la resistencia, pero, además, interfiere con el efecto Gurzhi, haciendo que este se manifieste o no. Este sigue un curioso patrón intermitente, que sirve para identificar el transporte hidrodinámico, y que refuerza nuestros resultados previos sobre la clasificación de regímenes de transporte [8]. Por analogía con el río español que aparece y desaparece bajo tierra, lo hemos bautizado informalmente como efecto Guadiana.

Las ecuaciones de Navier-Stokes muestran que la viscosidad acompaña a un término con derivadas del campo de velocidad. Es decir, la viscosidad no se manifiesta cuando el campo de velocidades es homogéneo, pero, cuando deja de serlo, la viscosidad puede dominar las propiedades eléctricas. Por ejemplo, la manipulación del borde del canal para hacerlo no uniforme, ya sea a través de un estrechamiento del mismo o añadiéndole protuberancias como muestran las geometrías del panel (b) en la figura 3, afecta al transporte y permite detectar el efecto superbalístico: cuanto más se retuerce la geometría, mayor es el efecto Gurzhi. De hecho, uno de los mayores porcentajes de reducción de la resistencia lo hemos observado en una superred de agujeros en grafeno [9], que permite transformar un material como el grafeno en un metamaterial con respuesta hidrodinámica.

Otro efecto que depende de la geometría es la formación de vórtices debidos a la fricción viscosa de los electrones. La formación de vórtices se observa tanto de forma directa, con técnicas de microscopía de proximidad para visualizar el campo de velocidades [11], como indirecta, a través de medidas de resistencia no local [12] (véase la geometría del panel (c) en la figura 3). El transporte óhmico no da lugar a vórtices, por lo que estos constituyen el tercer efecto contrario a la intuición. A la vista de estas evidencias, el flujo de estos electrones recuerda mucho más al movimiento del

agua en un río que a la dinámica electrónica en un metal convencional.

Un campo por explorar

De forma general, la hidrodinámica de electrones es el equivalente de la ley de Ohm en muchos materiales bidimensionales. Igual que nadie se plantearía construir un transistor sin antes conocer la ley de Ohm, cualquiera que se dedique al estudio de posibles aplicaciones electrónicas de materiales bidimensionales debería conocer en profundidad las características del transporte hidrodinámico. Por otra parte, la continua miniaturización de los circuitos electrónicos, que ha marcado los progresos de las últimas décadas, se está acercando a límites físicos. Cuanto más se reduce el tamaño, más energía se disipa, lastrando nuestra capacidad de obtener procesadores más veloces. Dadas las implicaciones medioambientales del problema, cualquier mecanismo que mitigue la disipación es indudablemente de gran interés, y los materiales bidimensionales pueden ser parte de la solución. El transporte hidrodinámico en dispositivos basados en materiales que exhiben efecto Gurzhi, junto con una elección adecuada de la geometría, presenta grandes ventajas en este sentido.

Cabe mencionar que muchos de los materiales de interés para observar el flujo hidrodinámico, como el grafeno bicapa o el PdCoO_2 , son altamente anisótropos [2], con electrones que se mueven preferentemente en seis direcciones del plano. En otras palabras, el material fija direcciones de transporte fáciles (baja resistencia eléctrica) y difíciles (alta resistencia eléctrica). Recientemente hemos comprobado que los efectos hidrodinámicos dependen de la dirección de transporte y que el efecto Gurzhi es más intenso en las direcciones difíciles, lo que mitiga la desventaja de su alta resistencia en los materiales anisótropos.

No olvidemos que los fluidos de electrones presentan nuevos efectos sin un equivalente directo en fluidos convencionales, por ejemplo, en su respuesta al efecto de los campos magnéticos o los campos de alta frecuencia, ingredientes comunes en los experimentos. Dadas sus excepcionales propiedades de transporte, los materiales usados en hidrodinámica son buenos candidatos para aplicaciones en electrónica de alta frecuencia. Estas incluyen la ventana de los terahertzios, una región del espectro electromagnético que, ante la falta de mecanismos con los que generar y detectar ondas, está infrautilizada. El flujo hidrodinámico de electrones es sensible a la radiación y actúa, por tanto, como un detector. También se han propuesto mecanismos hidrodinámicos que generen radiación. El ejemplo clásico es la inestabilidad de Dyakonov-Shur, que se produce cuando una corriente muy alta atraviesa un material muy puro, produciendo una oscilación. Siguiendo un enfoque completamente distinto, hemos hecho una propuesta

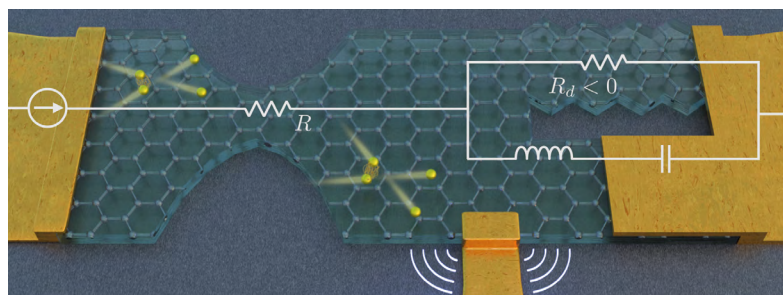


Fig. 4. La hidrodinámica de electrones (esferas amarillas) permite reducir la resistencia eléctrica y fabricar dispositivos de alta frecuencia, basados en la resistencia diferencial negativa $R_d = dV/dI < 0$ que puede presentar el flujo de electrones. En la imagen sobreimpresa se muestra el circuito equivalente de este dispositivo de alta frecuencia con resistencia diferencial negativa.

teórica que explota otro mecanismo, basado en el efecto Gurzhi o efecto Molenkamp, en el que una elevada corriente favorece las colisiones entre electrones [13]. En consecuencia, a mayor corriente, menor resistencia. En especial, si la caída de la resistencia es lo bastante abrupta, la resistencia diferencial $R_d = dV/dI$ no solo disminuye, sino que se puede volver negativa [14]. La dinámica colectiva de los electrones abre las puertas al diseño de dispositivos que presenten resistencia diferencial negativa empleando materiales como el grafeno, donde los mecanismos típicamente usados en semiconductores, como el efecto túnel resonante, no pueden aplicarse. Por tanto, y a pesar del desafío tecnológico que supondría, la resistencia diferencial negativa serviría para producir radiación de alta frecuencia, como se muestra en la figura 4, para fabricar circuitos amplificadores [14].

También es interesante estudiar la hidrodinámica en relación con la termoelectricidad, es decir, con los fenómenos en los que una diferencia de temperaturas da lugar a una diferencia de potencial eléctrico, y viceversa, con aplicaciones en dispositivos de enfriamiento o generadores de electricidad. La eficiencia de los dispositivos termoelectricos es un problema recurrente dentro de la física, pues requeriría aumentar la conductividad eléctrica y reducir la conductividad térmica de manera simultánea. Pero en los metales estas dos cantidades son proporcionales, como establece la ley de Wiedemann-Franz, limitando la eficiencia de los dispositivos termoelectricos. Afortunadamente, esta ley se aplica al transporte óhmico, pero no al hidrodinámico, lo que ofrece una mayor libertad para construir dispositivos termoelectricos aprovechando el comportamiento viscoso de electrones.

Para terminar, subrayamos otra característica que puede jugar un papel fundamental en los fluidos de electrones: su naturaleza cuántica. Los electrones son fermiones, que obedecen el principio de exclusión de Pauli. Este principio no solo bloquea las colisiones entre electrones a baja temperatura, sino que, a temperaturas finitas, fija las posibles direcciones entre electrones que pueden colisionar. Las restricciones geométricas dan lugar a la descripción tomográfica, y no puramente hidrodinámica, del fluido de electrones [9,15]. Por sutil que parezca, esto afecta al modelo de Navier-

Stokes. Ya no podemos ir de la mano de los fluidos convencionales y estamos obligados a buscar nuevos modelos para el flujo viscoso de electrones.

Conclusiones

En los conductores más habituales, la resistencia eléctrica viene determinada en gran medida por las colisiones de los electrones con las vibraciones de la red atómica y con sus defectos. El modelo de Drude explica razonablemente bien este comportamiento y, en consecuencia, la ley de Ohm [4]. El posterior desarrollo de la nanotecnología ha permitido analizar otro régimen de transporte de carga, conocido como balístico, donde la resistencia eléctrica está limitada por las dimensiones espaciales de los dispositivos electrónicos. Y, más recientemente, la capacidad de sintetizar materiales bidimensionales, como el grafeno, ha facilitado el estudio de un nuevo régimen de transporte, denominado hidrodinámico, donde las colisiones entre electrones determinan las propiedades eléctricas. En este trabajo hemos presentado una somera descripción de la fenomenología del transporte colectivo de electrones en materiales bidimensionales. Aunque estos fenómenos siguen siendo objeto de estudio e investigación, tanto teórica como experimental, los fundamentos se pueden comprender por analogía con la dinámica de los fluidos clásicos. Más allá de los efectos exóticos en los que los electrones se comportan fluido, las potenciales aplicaciones tecnológicas alientan a seguir explorando la hidrodinámica de electrones.

Agradecimientos

Queremos agradecer a F. Bermúdez-Mendoza, R. Soto, E. Díez, M. Amado, J. Salvador-Sánchez, J. Bernabeu y A. Cortijo. Nuestra investigación ha sido financiada por la Agencia Estatal de Investigación (Proyectos PID2020-113455GB-I00, PID2022-136285NB-C31 y PID2023-147067NB-I00) y por el proyecto “(MAD2D-CM)-UCM” de la Comunidad de Madrid, el plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia y por los fondos NextGenerationEU de la Unión Europea. J. E. A. agradece el apoyo del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades (Contrato FPU22/01039).

Referencias

- [1] M. POLINI y A. K. GEIM, Viscous electron flow, *Physics Today* **73**, 28 (2020).
- [2] G. VARNAVIDES, A. YACOBY, C. FELSER y P. NARANG, Charge transport and hydrodynamics in materials, *Nature Reviews Materials* **8**, 726 (2023).
- [3] Y. CAO, V. FATEMI, S. FANG, K. WATANABE, T. TANIGUCHI, E. KAXIRAS y P. JARILLO-HERRERO, Unconventional superconductivity in magic-angle graphene superlattices, *Nature* **556**, 43 (2018).
- [4] C. KITTEL, *Introduction to Solid State Physics* (John Wiley & Sons, 2005).

- [5] J. A. SULPIZIO, L. ELLA, A. ROZEN, J. BIRKBECK, D. J. PERELLO, D. DUTTA, M. BEN-SHALOM, T. TANIGUCHI, K. WATANABE, T. HOLDER, R. QUEIROZ, A. PRINCIPI, A. STERN, T. SCAFFIDI, A. K. GEIM y S. ILANI, Visualizing Poiseuille flow of hydrodynamic electrons, *Nature* **576**, 75 (2019).
- [6] R. N. GURZHI, Minimum of resistance in impurity-free conductors, *Journal of Experimental and Theoretical Physics* **17**, 521 (1963).
- [7] D. BARCONS RUIZ, N. C. HESP, H. HERZIG SHEINFUX, C. RAMOS MARIMÓN, C. M. MAISSEN, A. PRINCIPI, R. ASGARI, T. TANIGUCHI, K. WATANABE, M. POLINI, R. HILLENBRAND, I. TORRE y F. H. L. KOPPENS, Experimental signatures of the transition from acoustic plasmon to electronic sound in graphene, *Science Advances* **9**, eadi0415 (2023).
- [8] J. ESTRADA-ÁLVAREZ, F. DOMÍNGUEZ-ADAME y E. DÍAZ, Alternative routes to electron hydrodynamics, *Communication Physics* **7**, 138 (2024).
- [9] J. ESTRADA-ÁLVAREZ, J. SALVADOR-SÁNCHEZ, A. PÉREZ-RODRÍGUEZ, C. SÁNCHEZ-SÁNCHEZ, V. CLERICÒ, D. VAQUERO, K. WATANABE, T. TANIGUCHI, E. DIEZ, F. DOMÍNGUEZ-ADAME, M. AMADO y E. DÍAZ, Superballistic conduction in hydrodynamic antidot graphene superlattices, arXiv:2407.04527 (2024, aceptado en Physical Review X).
- [10] R. KRISHNA KUMAR, D. BANDURIN, F. PELLEGRINO, Y. CAO, A. PRINCIPI, H. GUO, G. AUTON, M. BEN SHALOM, L. A. PONOMARENKO, G. FALKOVICH, K. WATANABE, T. TANIGUCHI, I. V. GRIGORIEVA, L. S. LEVITOV, M. POLINI y A. K. GEIM, Superballistic flow of viscous electron fluid through graphene constrictions, *Nature Physics* **13**, 1182 (2017).
- [11] M. L. PALM, C. DING, W. S. HUXTER, T. TANIGUCHI, K. WATANABE y C. L. DEGEN, Observation of current whirlpools in graphene at room temperature, *Science* **384**, 465 (2024).
- [12] D. A. BANDURIN, I. TORRE, R. K. KUMAR, M. BEN SHALOM, A. TOMADIN, A. PRINCIPI, G. H. AUTON, E. KHESHTANOVA, K. S. NOVOSELOV, I. V. GRIGORIEVA, L. A. PONOMARENKO, A. K. GEIM y M. POLINI, Negative local resistance caused by viscous electron backflow in graphene, *Science* **351**, 1055 (2016).
- [13] L. MOLENKAMP y M. DE JONG, Observation of Knudsen and Gurzhi transport regimes in a two-dimensional wire, *Solid-State Electronics* **37**, 551 (1994).
- [14] J. ESTRADA-ÁLVAREZ, E. DÍAZ y F. DOMÍNGUEZ-ADAME, Negative differential resistance of viscous electron flow in graphene, *2D Materials* **12**, 015012 (2024).
- [15] P. LEDWITH, H. GUO, A. SHYTOV y L. LEVITOV, Tomographic Dynamics and Scale-Dependent Viscosity in 2D Electron Systems, *Physical Review Letters* **123**, 116601 (2019).

Jorge Estrada-Álvarez
Grupo Interdisciplinar de Sistemas
Complejos, Dpto. de Física de
Materiales, UCM



Elena Díaz
Grupo Interdisciplinar de Sistemas
Complejos, Dpto. de Física de
Materiales, UCM



Ricardo Brito
Grupo Interdisciplinar de Sistemas
Complejos, Dpto. de Estructura de la
Materia, Física Térmica
y Electrónica, UCM



Francisco Domínguez-Adame
Grupo Interdisciplinar de Sistemas
Complejos, Dpto. de Física de
Materiales, UCM

